LA DERIVADA

0.1 Definición de la derivada

Definición 0.1.1: Derivada de una función real

Dado una función real f donde $x_0 \in Dom(f)$, la pendiente de la recta tangente a la función en x_0 está dado por el límite de f cuando $\Delta x \to 0$ (Atangana, 2017, p. 7) y (Jia et al., 2024, p. 5).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

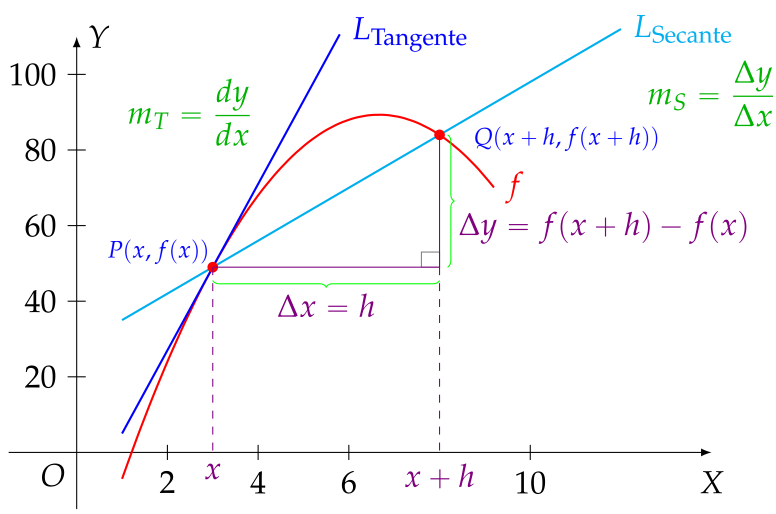
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{3}$$

Se lee: Derivada de la función f con respecto a x.

La derivada representa la razón de cambio de una variable respecto de otra.

Figura 1: Derivada de una función



También puede utilizar $\Delta x = h$, reemplazando en la Ecuación 1 anterior:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \tag{4}$$

0.1.1 Creadores del Cálculo y notación de la primera derivada

- **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)**, matemático alemán que desarrolló el CÁLCULO de manera independiente a Newton (Zheng et al., 2019, p. 12).

  Notación:

$$\frac{dy}{dx} \qquad \frac{df}{dx} \qquad \frac{dy}{dt} \qquad \frac{dx}{dt}$$

- **Isaac Newton (1643 - 1727)**, físico y matemático inglés que también desarrolló el CÁLCULO de manera independiente en la misma época que Leibniz. Utilizó la notación de puntos sobre las letras para denotar derivadas:

$$y' \qquad f'(x) \qquad \dot{y} \qquad \dot{x}$$

Recuerda

Si $u = u(x)$; $v = v(x)$ son funciones que dependen de x; y $a, b \in \mathbb{R}$ son números reales (Rosa & Weberszpil, 2018, p. 5)

1) $(\text{constante})' = 0$

2) $(a \cdot u)' = a \cdot u'$

3) $(a \cdot u + b \cdot v)' = a \cdot u' + b \cdot v'$

4) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

5) $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

6) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

7) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

8) $(v(u))' = v'(u) \cdot u'$

$$\left(u^v\right)' = u^v\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right)$$

Regla de la cadena: una función f depende de otra función g y g depende de x, entonces $f(g(x))$

$$x \quad \Longrightarrow \quad g(x) \quad \Longrightarrow \quad f(g(x))$$

La derivada, si $u = g(x)$

$$\Big[f(g(x))\Big]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \Big[f(u)\Big]' = f'(u) \cdot u' \tag{5}$$

0.2 Derivada de la función exponencial

$$u = u(x) \qquad \ln(e) = 1$$

1) $\left(b^u\right)' = \ln(b) \cdot u' \cdot b^u$

2) $\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$

0.3 Derivada de la función logaritmo

$$u = u(x) \qquad \ln(e) = 1$$

1) $\left(\log_b(u)\right)' = \dfrac{1}{\ln(b)} \cdot \dfrac{u'}{u}$

2) $\left(\ln(u)\right)' = \dfrac{u'}{u}$

0.4 Derivada de la función trigonométrica

$$u = u(x)$$

1) $\left(\operatorname{sen}(u)\right)' = \cos(u) \cdot u'$

2) $\left(\cos(u)\right)' = -\operatorname{sen}(u) \cdot u'$

3) $\left(\tan(u)\right)' = \sec^2(u) \cdot u'$

4) $\left(\cot(u)\right)' = -\csc^2(u) \cdot u'$

5) $\left(\sec(u)\right)' = \sec(u) \cdot \tan(u) \cdot u'$

6) $\left(\csc(u)\right)' = -\csc(u) \cdot \cot(u) \cdot u'$

0.5 Derivada de la función trigonométrica inversa

$$u = u(x)$$

1) $\left(\operatorname{arc\,sen}(u)\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

2) $\left(\operatorname{arc\,cos}(u)\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

3) $\left(\arctan(u)\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

4) $\left(\operatorname{arccot}(u)\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

5) $\left(\operatorname{arcsec}(u)\right)' = \dfrac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$

6) $\left(\operatorname{arccsc}(u)\right)' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$

0.6 Derivada implícita

Sea $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto D; se dice que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define $z = f(x, y)$ implícitamente como una función de x e y, cuando existe una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ (Van Khang, 2010, p. 12).

$$f(x, y) = 0 \qquad y = f(x) \qquad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{6}$$

Ejemplo 1

A partir de la expresión $x^2 + y^2 + x^3y^5 = \text{sen}(x^2 + 3y)$

Calcular la primera derivada $y' = \dfrac{dy}{dx}$

Solución

Paso 1. Toda la expresión llevamos al primer miembro

$$x^2 + y^2 + x^3y^5 - \text{sen}(x^2 + 3y) = 0$$

Donde $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3y^5 - \text{sen}(x^2 + 3y)$

Paso 2. La derivada parcial de f con respecto a x, considera a y como una constante.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3x^2y^5 - \cos\left(x^2 + 3y\right) \cdot (2x)$$

Paso 3. La derivada parcial de f con respecto a y, considera a x como una constante.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 5x^3y^4 - \cos\left(x^2 + 3y\right) \cdot (3)$$

Paso 4. Reemplazando en la Ecuación 6

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2x + 3x^2y^5 - \cos(2x + 3y) \cdot (2x)}{2y + 5x^3y^4 - \cos(x^2 + 3y) \cdot (3)}$$

0.7 Derivada de ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas, $x(t)$ e $y(t)$; donde t es el parámetro (Li et al., 2024, p. 8). Sus derivadas con respecto al parámetro se expresan así:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} y = y(t) & \Longrightarrow \quad \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} \\ \\ x = x(t) & \Longrightarrow \quad \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

La derivada de primer orden (primera derivada), $\dfrac{dy}{dx}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dt}(y)}{\dfrac{dx}{dt}} \tag{7}$$

La derivada de segundo orden (segunda derivada), $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$y'' = \frac{d^2\,y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} \tag{8}$$

La derivada de tercer orden (tercera derivada), $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

$$y^{(3)} = \frac{d^3\,y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} \tag{9}$$

Ejemplo 2: Derivada de las ecuaciones paramétricas

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = e^t \operatorname{sen} t & \Longrightarrow \quad \dfrac{dx}{dt} = e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t \\ \\ y(t) = e^t \cos t & \Longrightarrow \quad \dfrac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t}{e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t} = \frac{y - x}{x + y}$$

Ejemplo 3

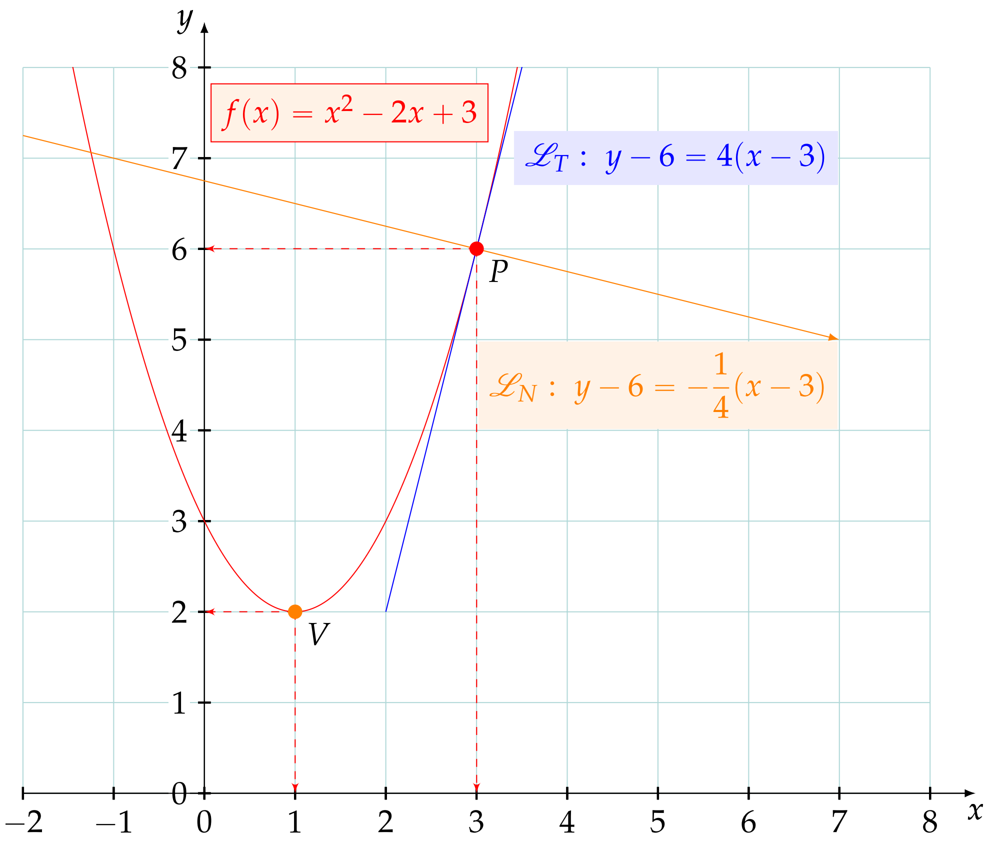
Determine la ecuación de la recta tangente $\mathscr{L}_T$ y normal $\mathscr{L}_N$ a la curva $\mathcal{C}$, descrita por la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$, en el punto P, cuya abscisa es 3.

Solución

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) + 3 - \left(3^2 - 2(3) + 3\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 2h + 3 - 6}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (h+4) \\
\therefore\ f'(3) &= 4
\end{aligned}$$

La pendiente de la recta tangente es $m_{L_T} = f'(3) = 4$ y de la recta normal es $m_{L_N} = -\frac{1}{4}$, el punto de paso $P\Big(3, f(3)\Big) = (3, 6)$. Las ecuaciones de las rectas:

$$\mathscr{L}_T :\ y - 6 = 4(x-3) \qquad \mathscr{L}_N :\ y - 6 = -\frac{1}{4}(x-3) \tag{10}$$



Referencias

Atangana, A. (2017). Fractal-fractional differentiation and integration: Connecting fractal calculus and fractional calculus to predict complex system [Cited by: 583]. *Chaos, Solitons and Fractals*, *102*, 396-406. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.04.027

Jia, K., Gao, Z., & Xiao, S. (2024). Parameter training method for convolutional neural networks based on improved Hausdorff-like derivative. *Expert Systems with Applications*, *238*, 121659. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121659

Li, C., Liu, J., & He, T. (2024). Fractional-order rate-dependent thermoelastic diffusion theory based on new definitions of fractional derivatives with non-singular kernels and the associated structural transient dynamic responses analysis of sandwich-like composite laminates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *132*, 107896. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.107896

Rosa, W., & Weberszpil, J. (2018). Dual conformable derivative: Definition, simple properties and perspectives for applications. *Chaos, Solitons & Fractals*, *117*, 137-141. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.10.019

Van Khang, N. (2010). Consistent definition of partial derivatives of matrix functions in dynamics of mechanical systems. *Mechanism and Machine Theory*, *45*(7), 981-988. https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2010.03.005

Zheng, Z., Zhao, W., & Dai, H. (2019). A new definition of fractional derivative. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, *108*, 1-6. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.10.001